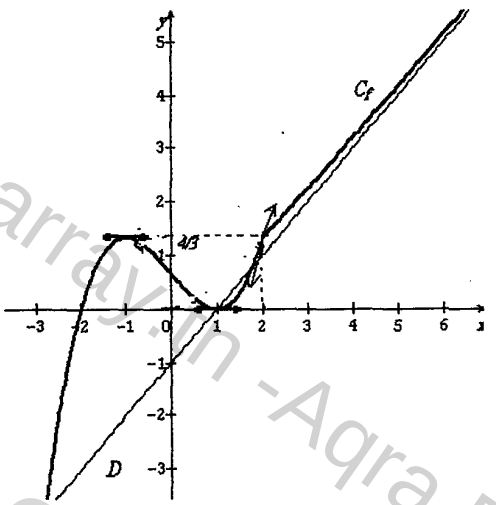
• Variation de f :
f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,2]$ *et* $[2,+\infty[$; on a :

$$\begin{cases} f'(x)=x^2-1 & x<2 \\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & x>2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	+		0		−	0	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	$4/3$	↘	0	↗	$+\infty$	‖	$+\infty$



Exercice n° 12 $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

● $Df=\{x\in IR;(x-1)^2\neq 0\}=IR-\{1\}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

● a) On a

$$ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$$

Par identification on aura : $\begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0\Rightarrow b=-1 \\ c-b=0\Rightarrow b=-1 \end{cases}$

D'ou $\forall x\in IR-\{1\}: f(x)=x-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty \Rightarrow$ la droite x = 1 est une asymptote

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=0$$

Ce qui prouve que la droite d'équation : y = x est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

2) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $Df=IR-\{1\}$ et on a :

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)^4+(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x-1)^3+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[(x^3-3x^2+3x-1+(x-1)+2\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(x^3-3x^2+4x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{x(x-1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^4}$$

Or pour le signe de x^2-3x+4 ,on a $\Delta=9-16<0$ donc $x^2-3x+4>0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$ d'ou le tableau de variation de f *suivant* :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		0	−	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	$+\infty$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn